Engenharia Civil

Estática

Prof. Talles Mello
Site: www.tallesmello.com.br
Email: eng.tallesmello@gmail.com
Whats: (67) 9940-9427

CAPÍTULO 1 – SISTEMAS ISOSTÁTICOS

1.1- INTRODUÇÃO

Isostática é a parte da Mecânica das Estruturas que estuda os sistemas determinados, isto é, aqueles cujo grau de liberdade é nulo.

Tais sistemas têm o número de vínculos estritamente necessário para mantê-los em equilíbrio e são resolvidos com a utilização das equações da Estática resultantes das condições de equilíbrio.

1.2 – CONCEITOS BÁSICOS

1.2.1 – Definições: Uma estrutura pode ser:

- de configuração fixa: Construção civil, Construção mecânica.
- de configuração variável.

Uma estrutura será de CONSTRUÇÃO CIVIL quando envolve diretamente serviços de engenharia civil tais como: pontes, "esqueletos" dos edifícios, barragens, entre outras. Elas podem ser encontradas em concreto, alvenaria, aço, madeira, alumínio, etc.

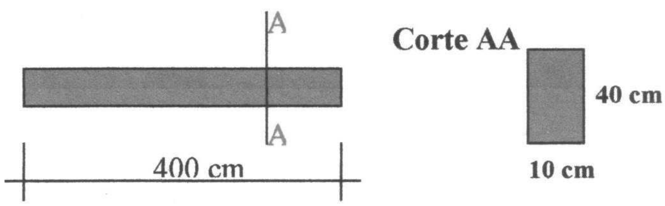
Será considerada de CONSTRUÇÃO MECÂNICA quando a estrutura sendo metálica envolve serviços de usinagem, como produção em fábricas ou usinas fixas e tiver uso ou destino dentro da engenharia mecânica, tais como: Caldeira, chassi de autos, etc.

A ***Estática*** trata do equilíbrio dos corpos em repouso ou que se move com velocidade constante, e a ***Dinâmica*** por sua vez, trata dos corpos em movimento acelerado.

1.3 – CLASSIFICAÇÃO DAS PEÇAS OU ELEMENTOS ESTRUTURAIS

1.3.1 – Elementos de 1ª categoria: são os elementos denominados de LINEARES, onde **uma** dimensão é dominante.

Ex: hastes ou barras (Pilares, vigas, tirantes, escoras, etc.)

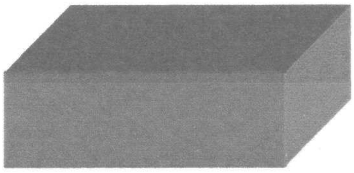


1.3.2 – Elementos de 2ª categoria: são os elementos bi-espaciais ou com **duas** dimensões dominantes.

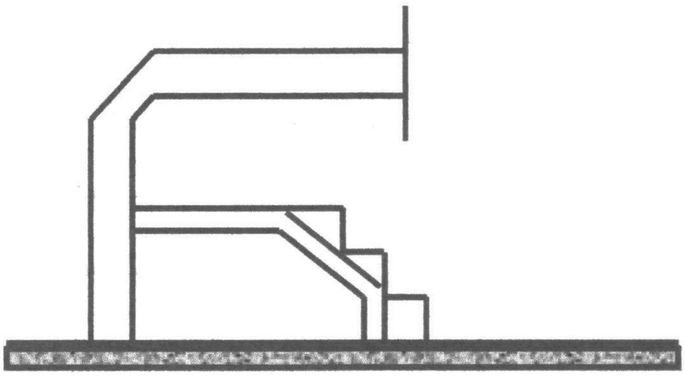
Ex: placas, discos, chapas, etc.

1.3.3 – Elementos de 3ª categoria: são os elementos que não tem dimensão dominante.

Ex: blocos de fundação, maciços, etc.



1.3.4 – Associação de peças ou elementos estruturais



1.4 – APOIOS – VÍNCULOS

Os vínculos podem ser de apoio e de ligação ou transmissão não havendo nenhuma distinção rígida entre os dois tipos, dependendo da função que o vínculo esteja exercendo no momento em que é analisado.

Por exemplo, analisando o sistema formado por:

LAJE – VIGA – PILAR – FUNDAÇÃO

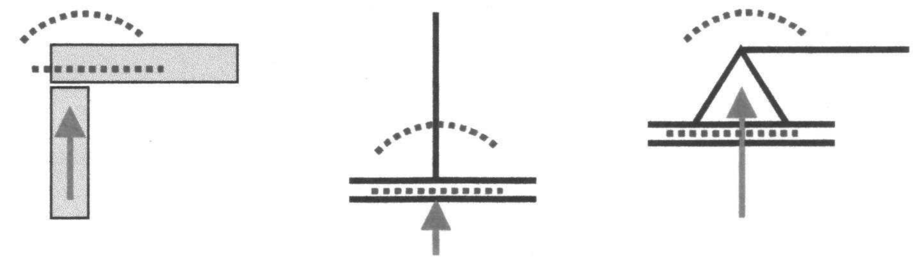
Se analisarmos o sistema **LAJE – VIGA**, **a viga** trabalhará como **vínculo de apoio**, mas se a análise for da **LAJE – VIGA – PILAR**, este último (**o pilar**) é que trabalhará como **vínculo de apoio**, passando a **viga** para a condição de **vínculo de ligação** da laje com o pilar, e assim teremos casos semelhantes, impossibilitando-nos a uma separação distinta entre APOIO e LIGAÇÃO.

1.4.1 – Classificação quanto aos gêneros

-Vínculo de 1º gênero ou apoio móvel

É o vínculo que IMPEDE UM movimento, deixando LIVRE os outros DOIS.

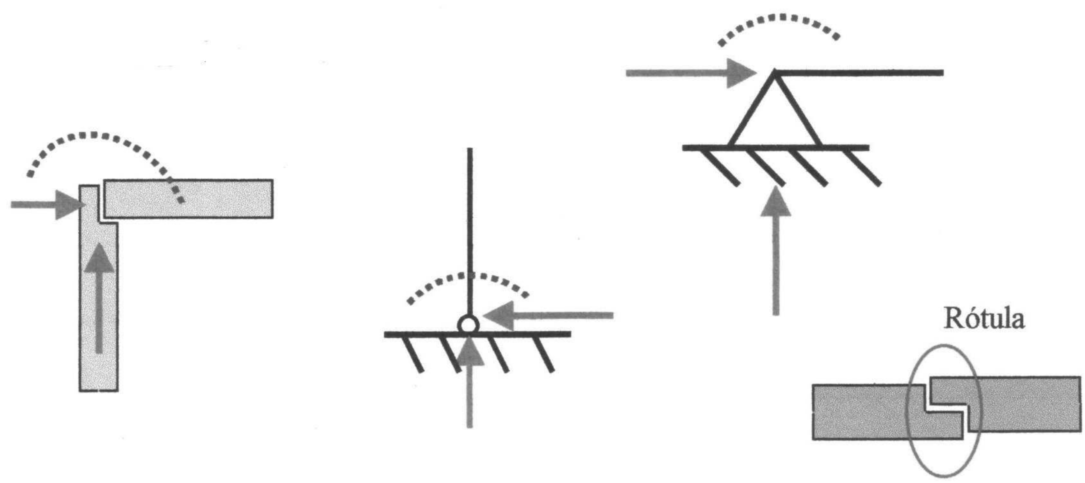
Representação:



-Vínculo de 2º gênero ou apoio fixo

É o vínculo que IMPEDE DOIS movimentos, deixando LIVRE os outros UM.

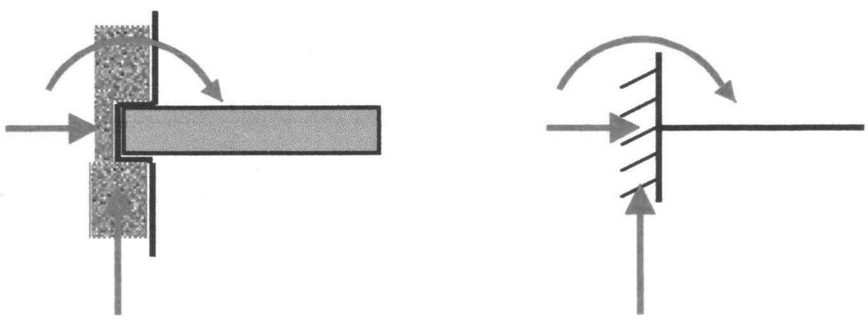
Representação:



-Vínculo de 3º gênero ou engastamento

É o vínculo que IMPEDE todos os TRÊS movimentos.

Representação:



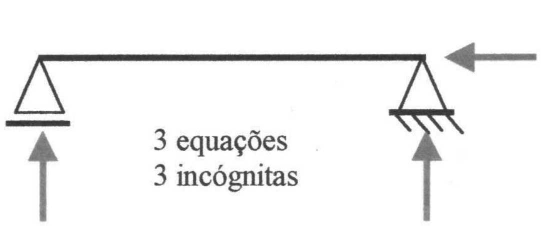
De acordo com o número de vinculações, podemos classificar os sistemas como:

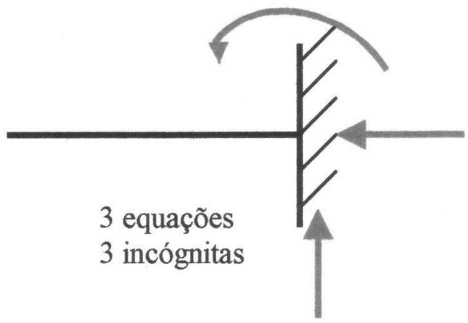
- SISTEMAS ISOSTÁTICOS: são aqueles cujos números de vínculos são os estritamente necessários, isto é: **Nº EQUAÇÕES = Nº INCÓGNITAS**

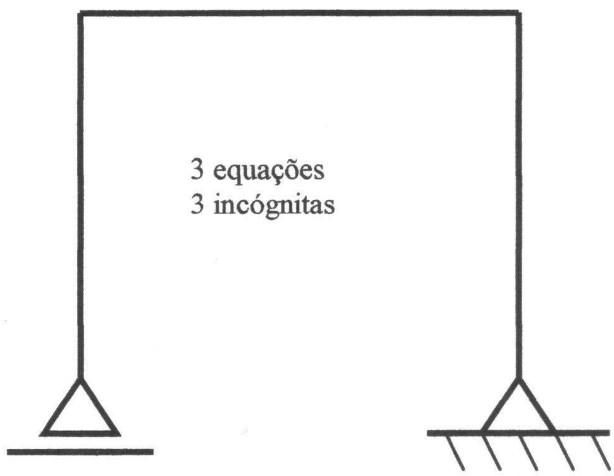
- SISTEMAS HIPOESTÁTICOS: **Nº EQUAÇÕES > Nº INCÓGNITAS**

- SISTEMAS HIPERESTÁTICOS: **Nº EQUAÇÕES < Nº INCÓGNITAS**

Como sistemas isostáticos podemos citar alguns exemplos conforme segue:







$$\sum F_H = 0$$
$$\sum F_V = 0$$
$$\sum M = 0$$

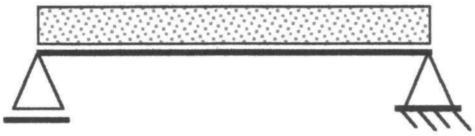
1.5 – VIGAS

1.5.1 – Definição

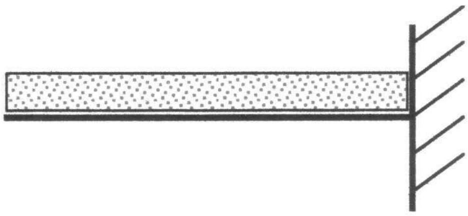
Viga é um elemento estrutural onde uma das suas dimensões é predominante, portanto, elemento de 1ª categoria.

1.5.2 – Classificação

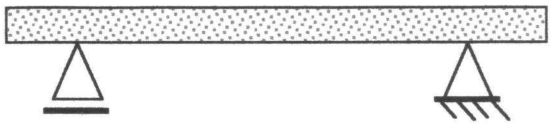
a) Vigas bi apoiadas:



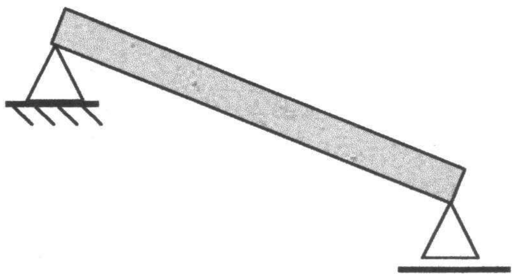
b) Vigas engastadas:



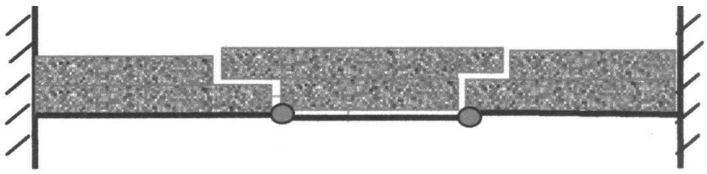
c) Vigas bi apoiadas com balanço:



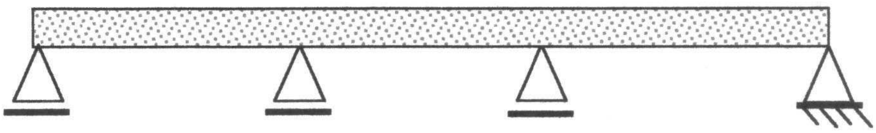
d) Vigas inclinadas:



e) Vigas Gerber:

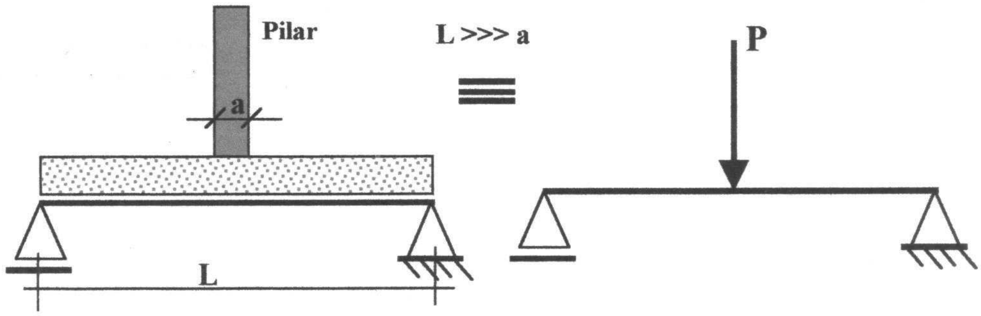


f) Vigas contínuas:



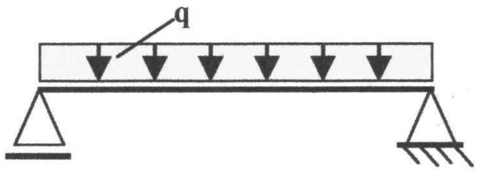
1.6 – SISTEMAS DE CARGA

a) Carga concentrada:



b) Carga distribuída:

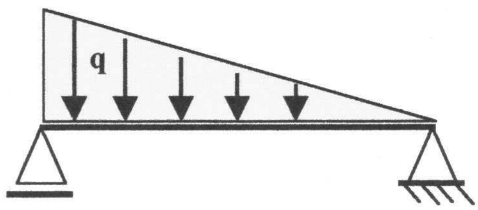
b.1) Uniformemente: quando a intensidade da carga distribuída for constante.

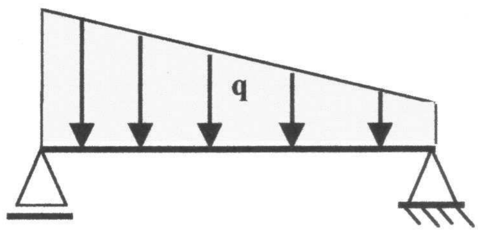


Sendo: **q = taxa de distribuição** (a unidade dada em: Kgf/m ou tf/m)

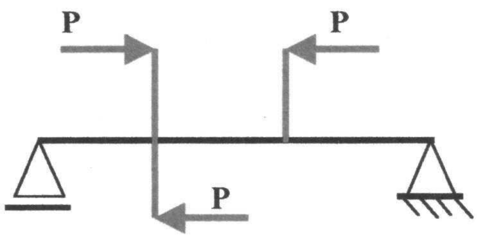
(unid. Força/ unid. Comprimento)

b.2) Não uniforme: quando a intensidade da carga for variável.

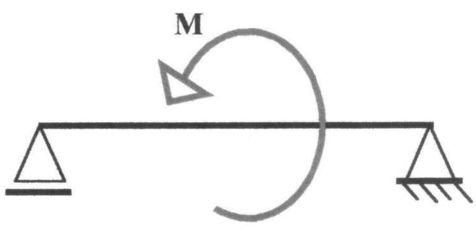




c) Carga conjugada:



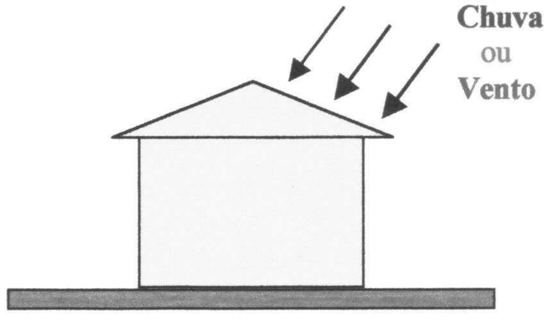
d) Carga Momento: (unid. Força x distância perpendicular do ponto até a carga)



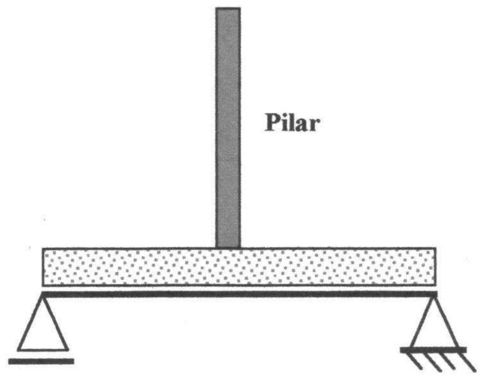
M = ... tf x m ou ... kgf x m

e) Outras cargas

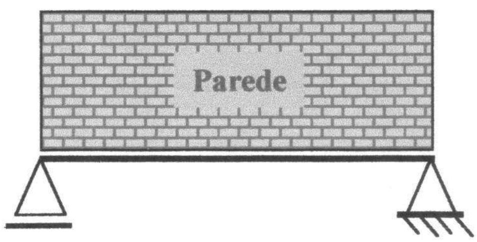
e.1) Cargas acidentais (variável):



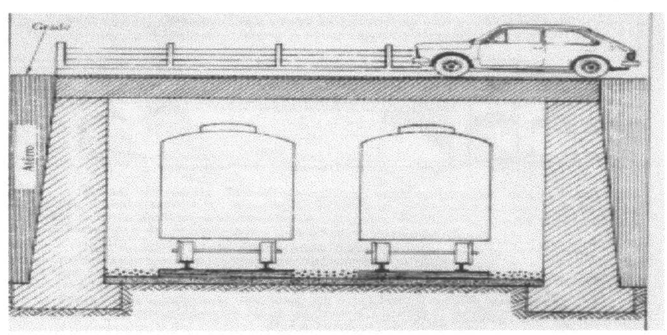
e.2) Cargas permanentes: (ex: peso próprio)



e.3) Cargas Estáticas:



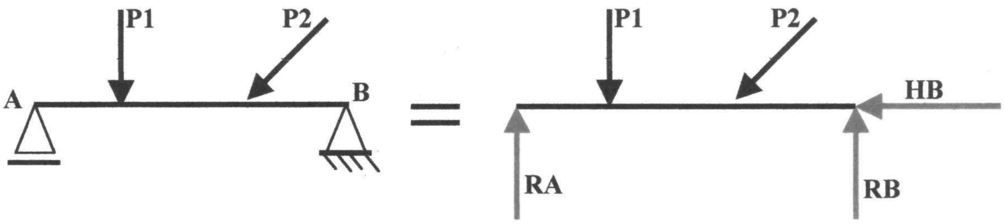
e.4) Cargas dinâmicas:



1.7 – REAÇÕES DE APOIO

As reações nos vínculos de um modo geral, quer sejam apoios, quer sejam simples transmissão, são determinadas com a aplicação das seguintes regras que decorrem imediatamente do estudo da estática.

a) Substituir os vínculos (apoios ou transmissão) pelas forças de ligação correspondentes, tendo sempre presente que **"a cada movimento impedido corresponde a uma força de ligação (reação)"**.



b) Arbitrar um sentido para cada reação.

c) Escrever as equações fundamentais de equilíbrio.

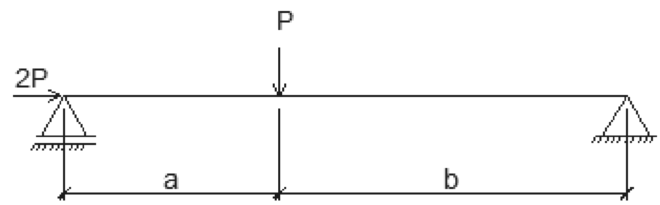
$\sum F_H = 0 \qquad \sum F_V = 0 \qquad \sum M = 0$

d) CONSERVAR os sentidos arbitrados para as reações que resultarem **positivas** e INVERTER os sentidos das que resultarem **negativas**.

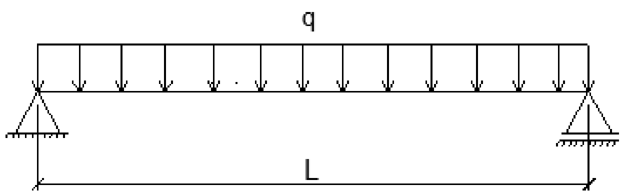
EXERCÍCIOS

Calcular as reações de apoio das estruturas a seguir.

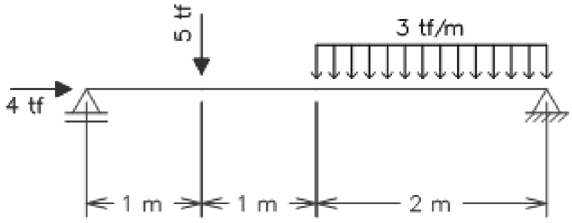
1)



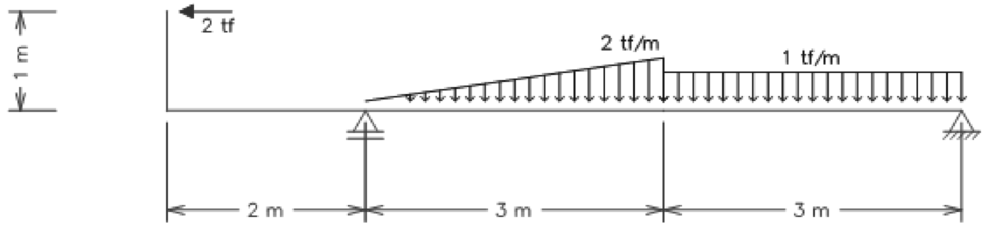
2)



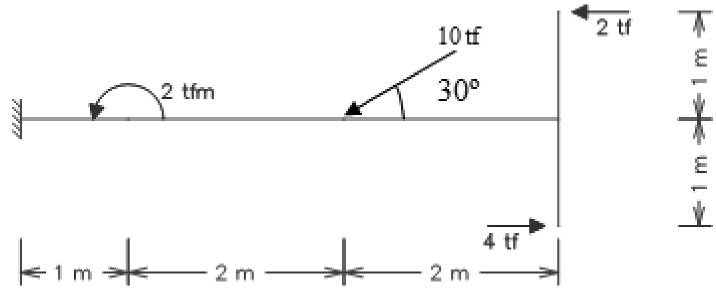
3)


5 tf
3 tf/m
4 tf
1 m
1 m
2 m

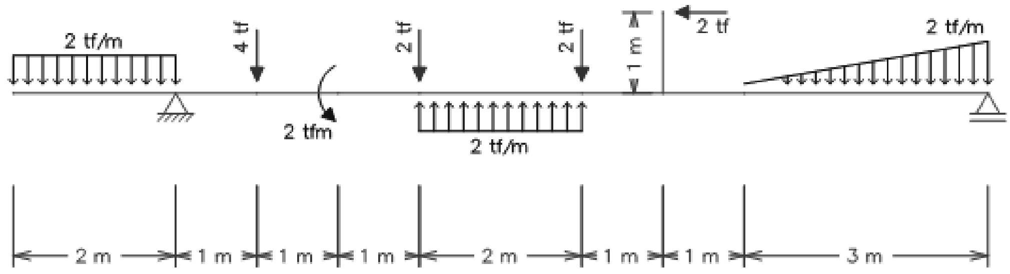
4)


1 m
2 tf
2 tf/m
1 tf/m
2 m
3 m
3 m

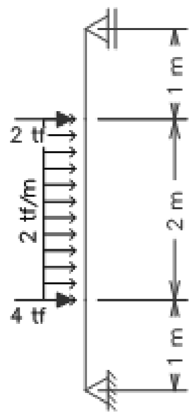
5)


10 tf
2 tf
2 tfm
30°
1 m
1 m
4 tf
1 m
2 m
2 m

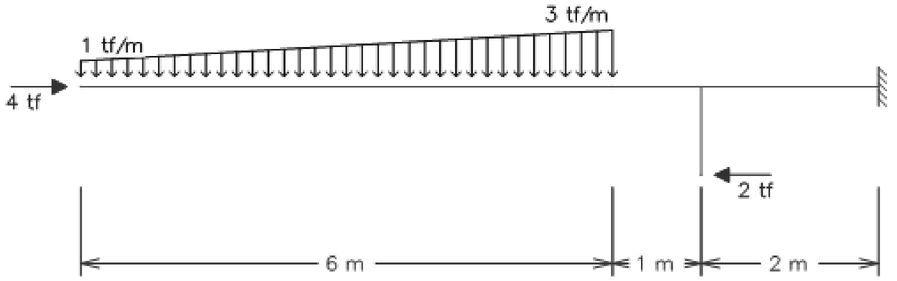
6)


2 tf/m
4 tf
2 tf
2 tf
1 m
2 tf
2 tf/m
2 tfm
2 tf/m
2 m
1 m
1 m
1 m
2 m
1 m
1 m
3 m

7)


1 m
2 tf
2 tf/m
2 m
4 tf
1 m

8)


3 tf/m
1 tf/m
4 tf
2 tf
6 m
1 m
2 m

1.8 – ESFORÇOS SIMPLES

1.8.1 – Classificação e definições

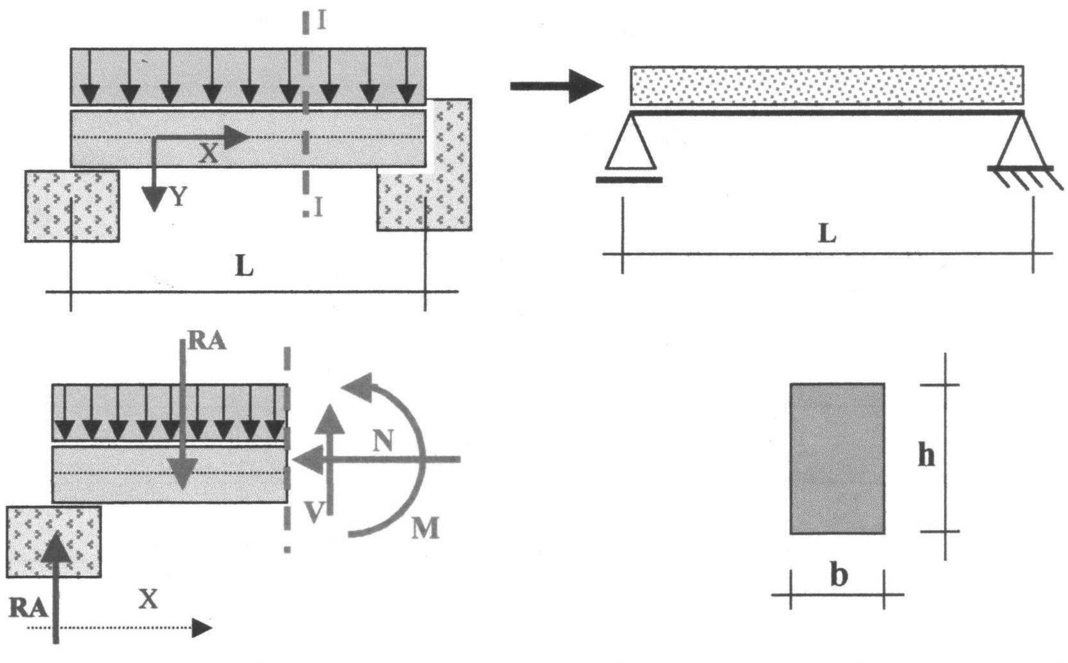
Um sistema de forças quaisquer, que satisfaça as equações universais da estática, atuando sobre um corpo rígido, provocará nele o aparecimento de esforços que, analisados segundo seu eixo e uma seção que lhe é perpendicular, poderão ser definidos como esforços simples e classificados como seguem:

ESFORÇO NORMAL (N): é o esforço que age no sentido paralelo ao eixo longitudinal da barra, no sentido de **comprimir** ou **tracionar** a seção.

ESFORÇO CORTANTE (V): é o esforço que age no sentido de **cortar** ou **cisalhar** a seção, ocorre perpendicular ao eixo longitudinal da barra.

MOMENTO FLETOR (MF): é o esforço que age no sentido de **envergar** ou **flexionar** o eixo longitudinal da viga.

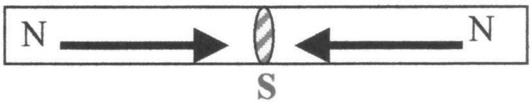
MOMENTO TORSOR (T): é o esforço que age no sentido de **torcer** ou **girar** a seção em relação ao eixo longitudinal da viga.



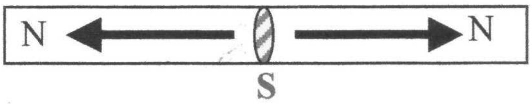
Para determinar os valores desses esforços numa seção, basta **estudar as forças que atuam de um lado ou de outro dela**, pois os valores são iguais, apenas os sentidos diferem, o que implica no estabelecimento de convenções para que cheguemos ao mesmo sinal para os valores.

1.8.2 – Convenções

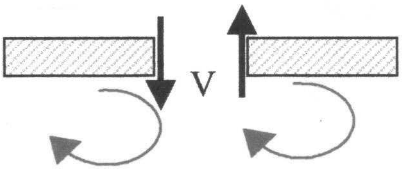
Esforço Normal: quando o esforço **comprimir** a seção, será −



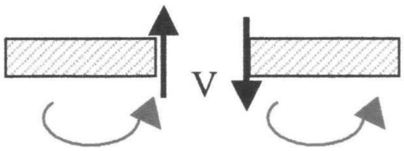
quando o esforço **tracionar** a seção, será +



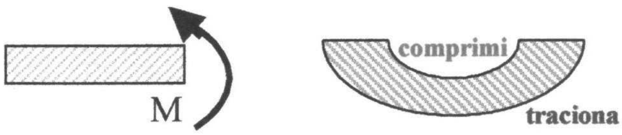
Esforço Cortante: quando a seção tende a girar no **sentido horário**, será +



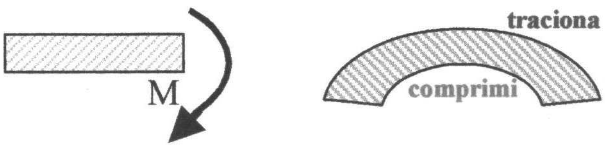
quando a seção tende a girar no **sentido anti-horário**, será −



Momento Fletor: quando o momento (M) **tracionar** as **fibras inferiores** e **comprimir** as **fibras superiores**, será +



quando o momento (M) **comprimir** as **fibras inferiores** e **tracionar** as **fibras superiores**, será −

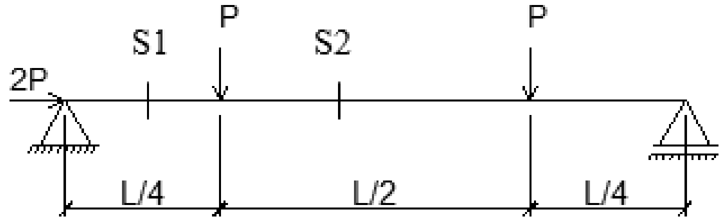


Momento Torçor: regra da mão direita.

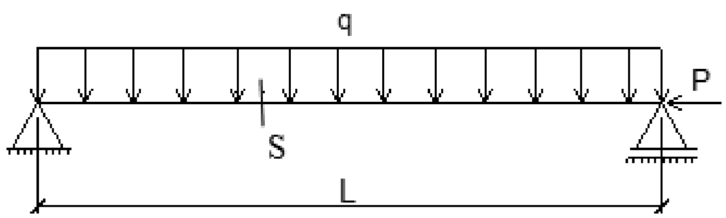
EXERCÍCIOS

Calcule os esforços simples, nas seções "S", indicadas nas estruturas a seguir

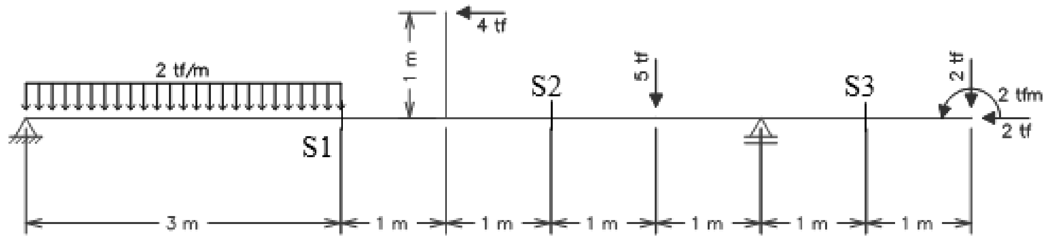
1)



2)

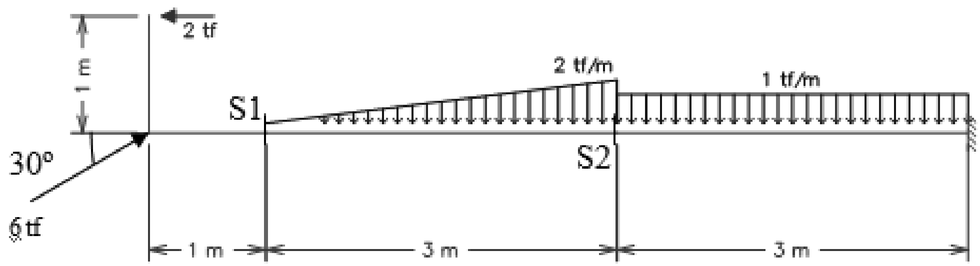


3)



4 tf
1 m
2 tf/m
S2
5 tf
S3
2 tf
2 tfm
2 tf
S1
3 m
1 m
1 m
1 m
1 m
1 m
1 m

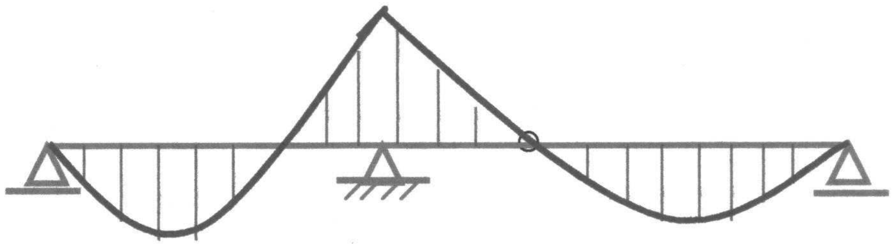
4)



2 tf
1 m
2 tf/m
1 tf/m
S1
30º
S2
6 tf
1 m
3 m
3 m

1.9 – LINHAS DE ESTADO – DIAGRAMAS

Chama-se de Linhas de Estado o estudo gráfico dos esforços simples (N, V, M)



1.9.1 – Diagramas

Para traçar os diagramas de esforços simples de uma estrutura, algumas regras básicas devem ser observadas, conforme veremos a seguir:

a) **Determinar os valores** dos esforços simples para as seções principais, devidamente destacadas na estrutura a ser calculada.

b) **Marcar os valores** dos esforços simples nas seções principais, tendo em vista que, para os esforços cortantes e normais, os valores positivos serão marcados para cima do eixo em barras horizontais e para fora em barras verticais, enquanto que os valores dos momentos, ao contrário, por serem os valores marcados do lado das fibras tracionadas.

c) Para o **Momento Fletor**, ligar esses pontos por linhas RETAS: *CHEIAS* **nos trechos descarregados** e *TRACEJADAS* **nos trechos onde existam carregamentos distribuídos**. Nas tracejadas e no sentido de atuação da carga distribuída e sempre perpendicular ao eixo da barra, marcar os valores das **parábolas** correspondentes ao trecho. Assim, os trechos com *cargas distribuídas* apresentarão sobre as tracejadas, **parábolas cujos graus serão duas unidades acima do grau da ordenada de carga**. Para o **Esforço Cortante**, os valores encontrados para as seções principais serão ligadas por **linhas retas nos trechos descarregados**. Nos trechos onde há *carregamentos distribuídos*, as seções extremas serão ligadas por **linhas correspondentes a uma função com grau de uma unidade acima da ordenada de carga**. Para o **Esforço Normal**, os valores das seções principais serão ligados por **linhas retas cheias**.

d) Aparecerá **DESCONTINUIDADE** nos seguintes casos:

- No diagrama de **Momento Fletor**, onde houver carregamento aplicado (carga momento, carga conjugada ou binário).

- No diagrama de **Esforço Cortante**, onde houver carga concentrada aplicada que seja perpendicular ao eixo da barra.

- No diagrama de **Esforço Normal**, onde houver carga concentrada aplicada que seja paralela ao eixo da barra.

e) Onde houver **carga concentrada aplicada**, o diagrama de momento fletor apresentará angulosidade no sentido da força.

ROTEIRO – REGRAS GERAIS

1. Verificar o tipo de sistema da estrutura. (isostático, hipoestático, hiperestático)
2. Se a estrutura é Isostática, então, determinar as reações de apoio da estrutura.
3. Determinar os valores dos esforços nos pontos principais da estrutura.
4. Marcar os valores assim obtidos a partir do eixo da viga respeitando-se a convenção de sinais.
5. Ligar os pontos assim marcados por linhas:

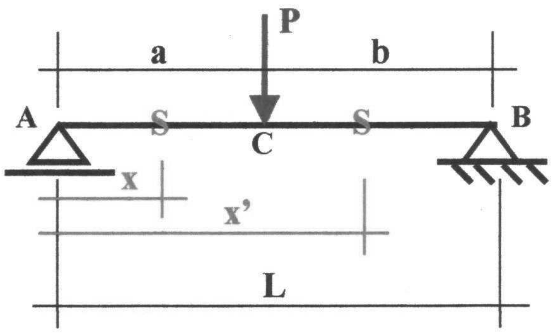
   -para o momento fletor: *retas cheias* nos trechos descarregados e por *retas tracejadas* nos trechos sujeitos há carregamentos distribuídos;

   -para o cortante: *retas cheias* nos trechos descarregados e com carregamentos distribuídos e uniformes e *por parábolas* nos trechos onde houver carregamentos distribuídos e não uniformes.
6. A partir das linhas tracejadas, na direção perpendicular ao eixo da viga e no sentido do carregamento, marcam-se os valores correspondentes as parábolas dos momentos em cada trecho.
7. Ao final, hachurar o espaço compreendido entre as parábolas e/ou as linhas retas cheias, chamadas de linha de fechamento e o eixo da peça e tem-se assim os diagramas dos esforços simples para uma determinada estrutura.

EXEMPLOS:

Traçar os diagramas dos esforços simples para as estruturas a seguir.

1)



a) **Cálculo das reações de apoio**

$\boxed{\mathbf{Ra} = \frac{Pb}{L}}$, $\boxed{\mathbf{Rb} = \frac{Pa}{L}}$

e $\boxed{\mathbf{Hb} = 0}$

b) **Cálculo dos Esforços**. Pontos Principais - A, B e C

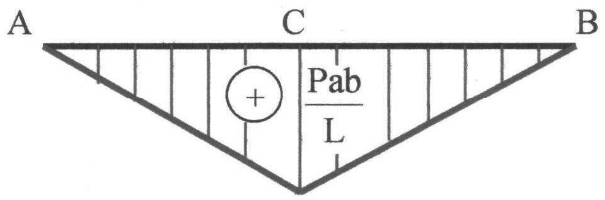
Ponto A – Esq.
N = 0
V = 0 ⟶ Pb / L
M = 0

Ponto C – Esq.
N = 0
V = Pb / L ⟶ Pa / L
M = Pab / L

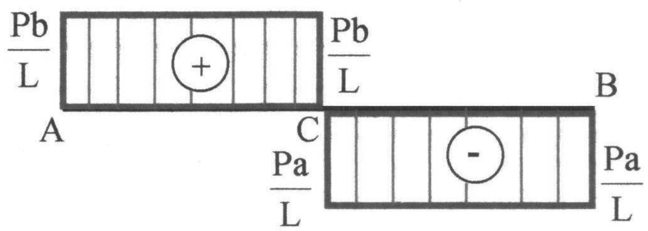
Ponto B – Dir.
N = 0
V = - Pa / L
M = 0

c) **Diagramas**

DMf $\frac{-}{+}$

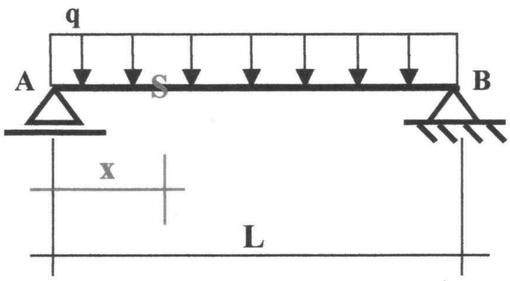


DV $\frac{+}{-}$



DN $\frac{+}{-}$

2)



a) **Cálculo das reações de apoio**

$\boxed{\mathbf{Ra} = \frac{qL}{2}}$, $\boxed{\mathbf{Rb} = \frac{qL}{2}}$

e $\boxed{\mathbf{Hb} = 0}$

b) **Cálculo dos Esforços**: b.1 - Pelos Pontos Principais - A e B

Ponto A – Esq.	**Ponto B – Dir.**
N = 0	N = 0
V = 0 ⟶ +qL / 2	V = 0 ⟶ qL / 2
M = 0	M = 0

b.2 - Através do cálculo das equações dos esforços, no trecho AB, em S.

M em **S** pela **Esq**.--- $\boxed{M = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}}$ eq. de uma **parábola**

V em **S** pela **Esq**.--- $\boxed{V = \frac{qL}{2} - qx}$ eq. de uma **reta**

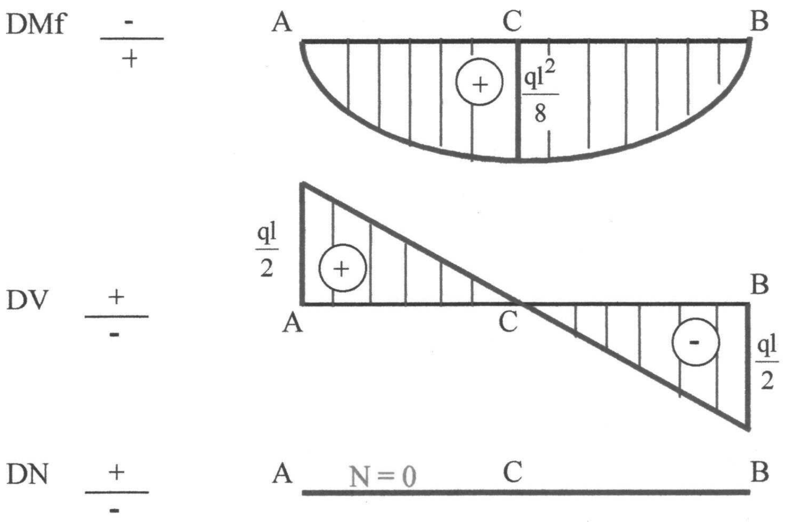
c) **Diagramas**

Para o Momento Fletor : Substituindo x = 0 e x = L na eq. do Mom. Teremos: MA = 0 e MB = 0.

Como a **linha de fechamento do diagrama** é uma **função parabólica**, devemos encontrar o **ponto de máximo** da função. Como?

Se derivarmos a eq. parabólica : - $\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}\right)}$ --- obteremos uma fç.

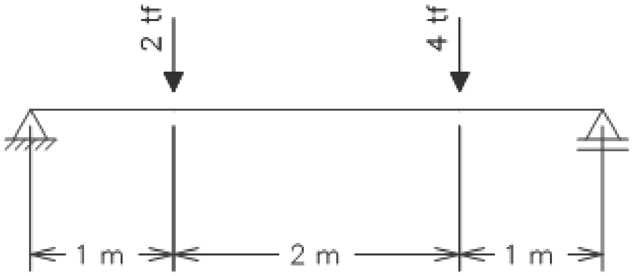
que nos dá a **tangente** em todos os pontos da curva; além de pontos de **máx e mín. da função**.



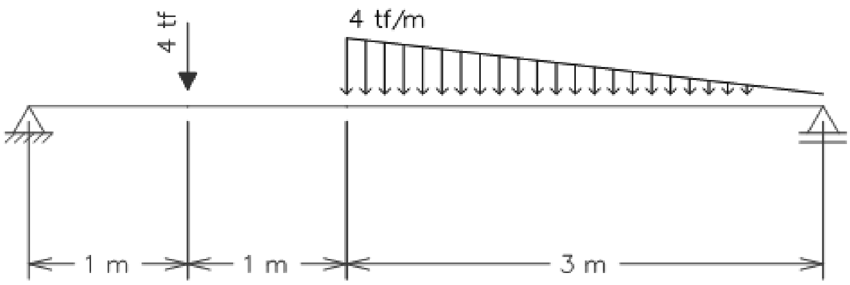
EXERCÍCIOS:

Traçar os diagramas dos esforços simples para as estruturas a seguir.

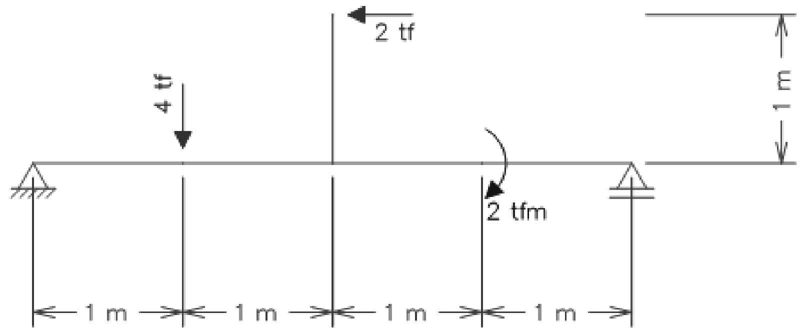
3)



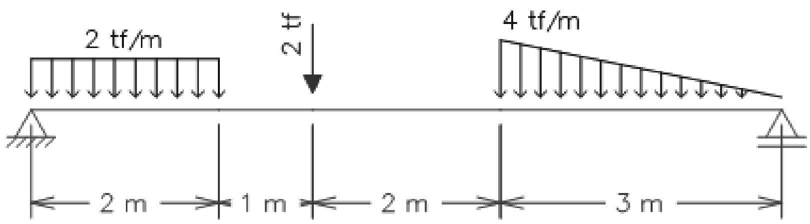
4)



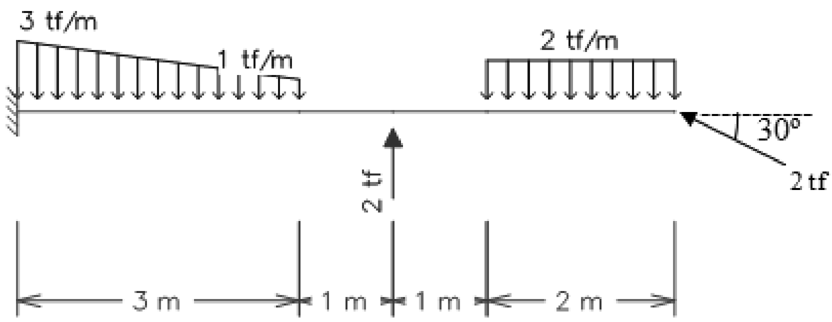
5)



6)

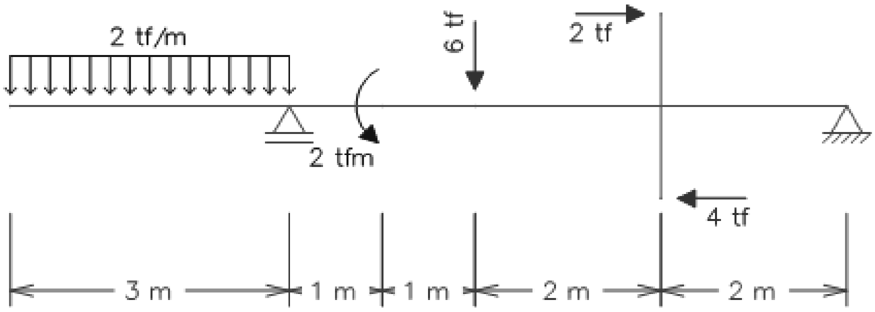


7)



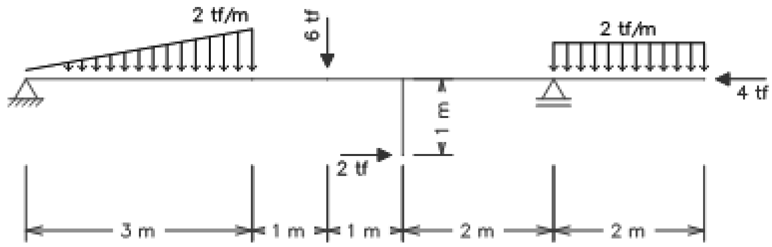
3 tf/m
1 tf/m
2 tf/m
30°
2 tf
2 tf
3 m
1 m
1 m
2 m

8)

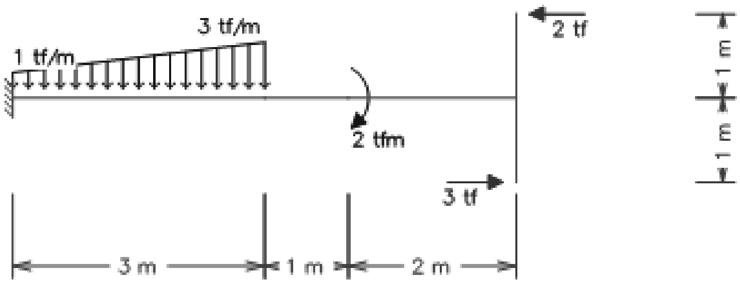


2 tf/m
6 tf
2 tf
2 tfm
4 tf
3 m
1 m
1 m
2 m
2 m

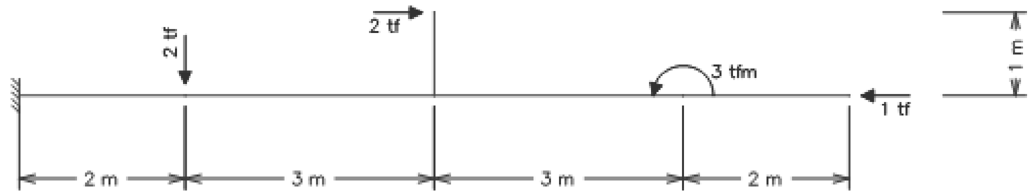
9)


2 tf/m
6 tf
2 tf/m
4 tf
1 m
2 tf
3 m
1 m
1 m
2 m
2 m

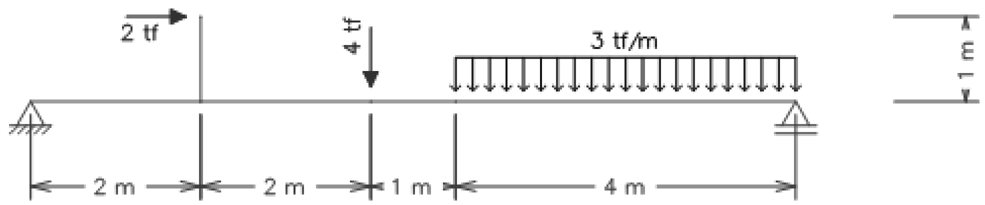
10)


3 tf/m
1 tf/m
2 tf
2 tfm
3 tf
1 m
1 m
3 m
1 m
2 m

11)

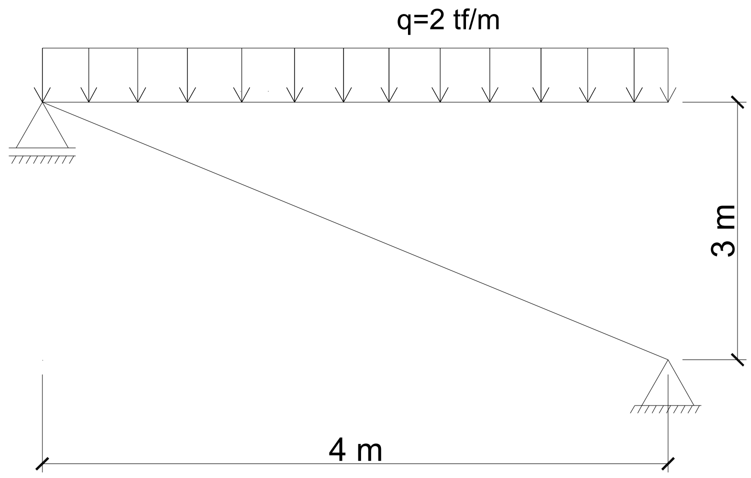


12)

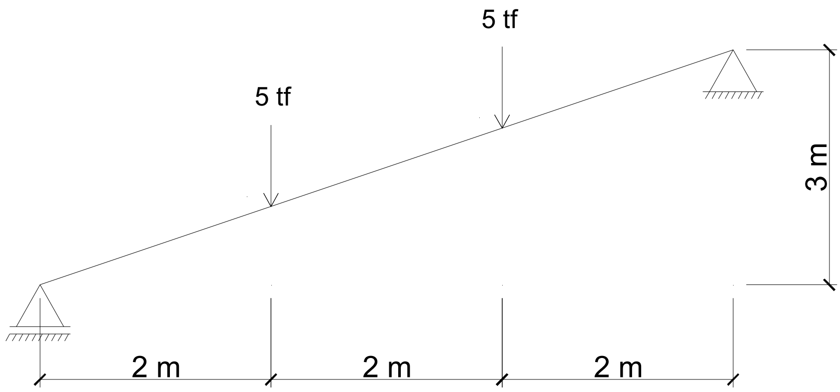


1.10 – VIGAS INCLINADAS

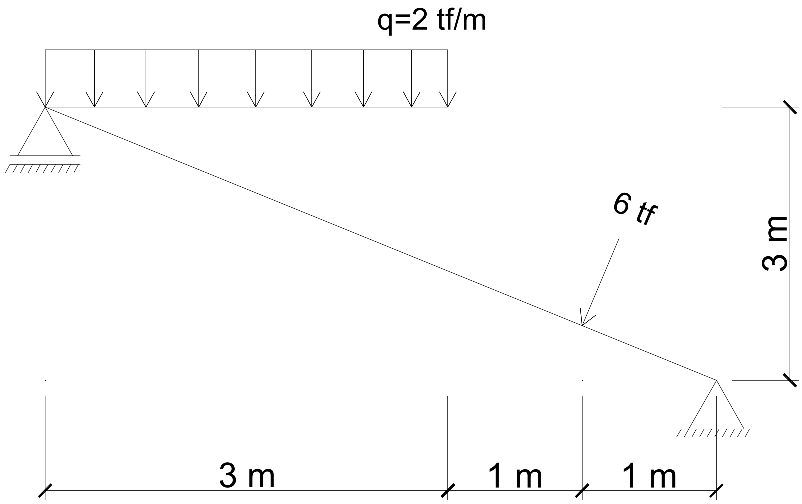
1)



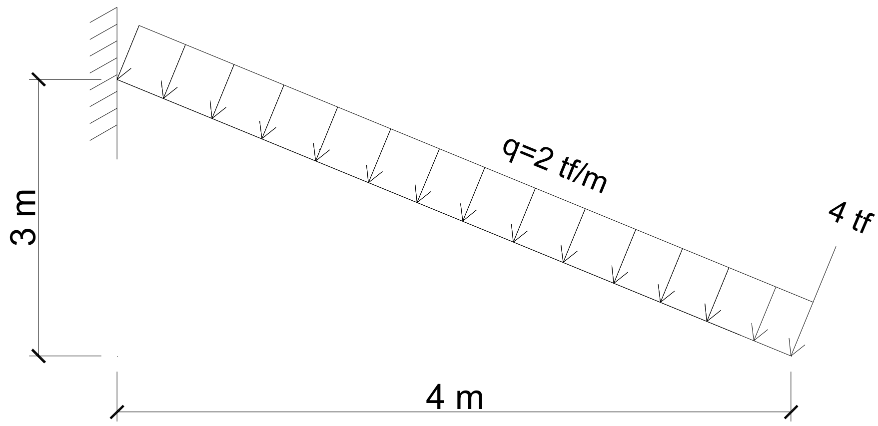
2)



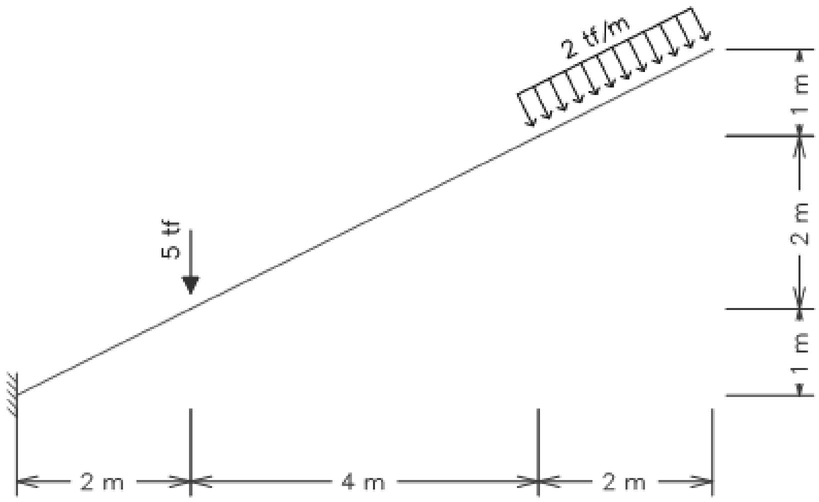
3)



4)

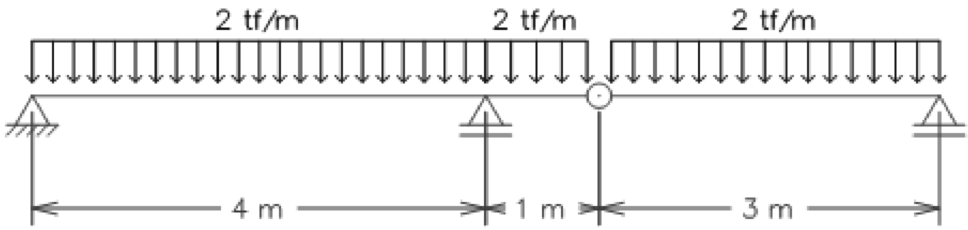


5)

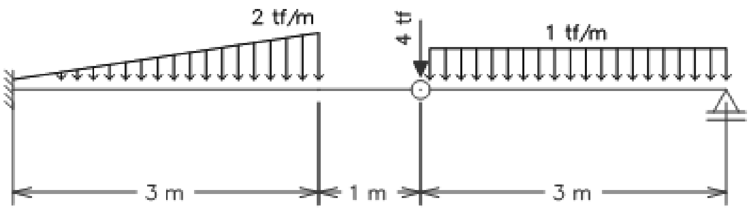


1.11 – VIGAS GERBER

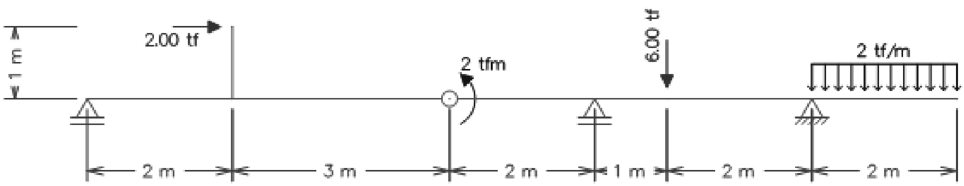
1)



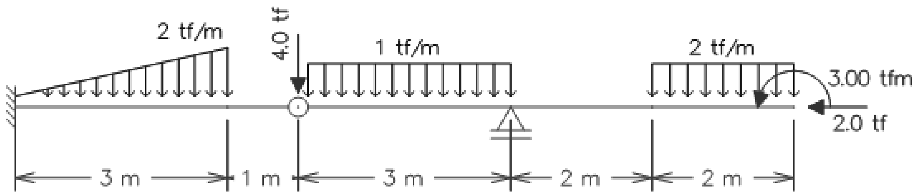
2)



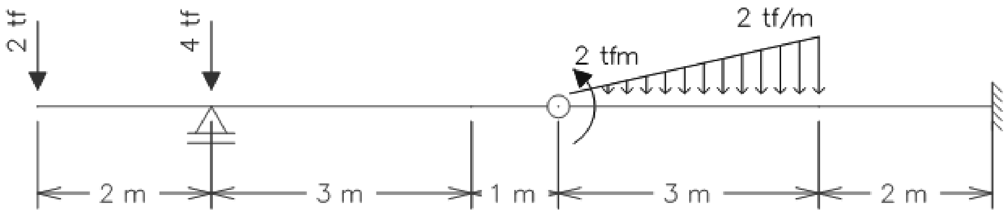
3)



4)

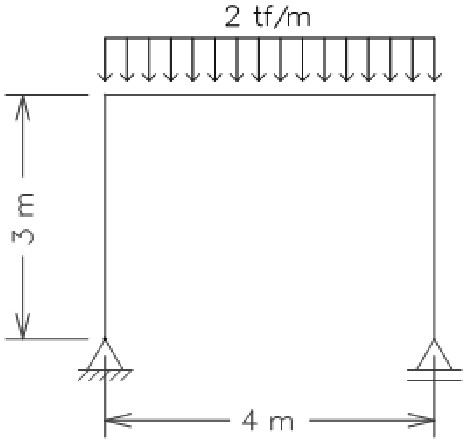

2 tf/m
4.0 tf
1 tf/m
2 tf/m
3.00 tfm
2.0 tf
3 m
1 m
3 m
2 m
2 m

5)

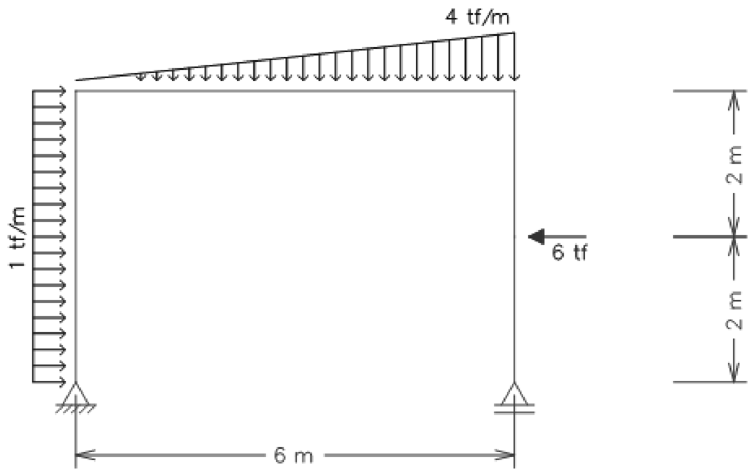

2 tf
4 tf
2 tf/m
2 tfm
2 m
3 m
1 m
3 m
2 m

1.12 – QUADROS ISOSTÁTICOS

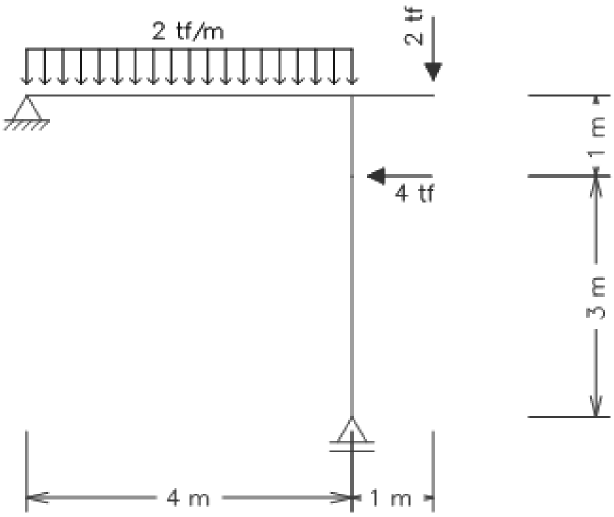
1)



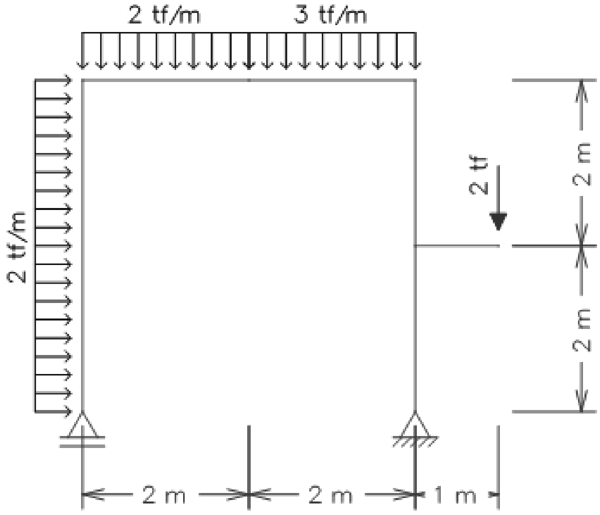
2)



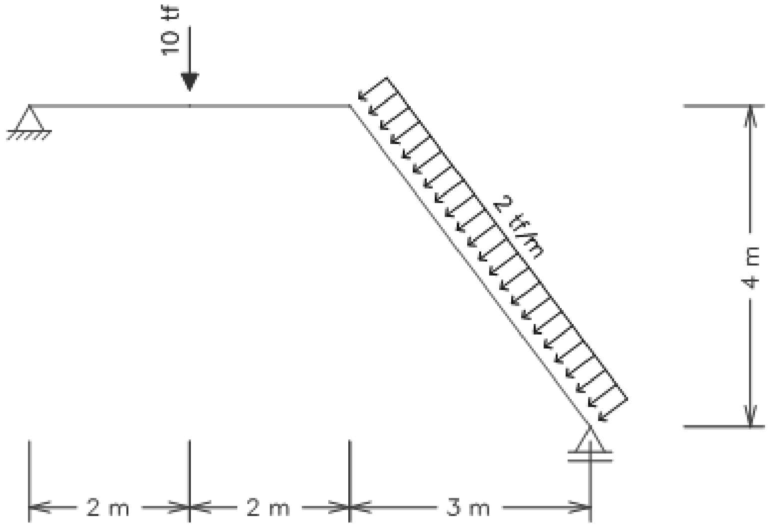
3)



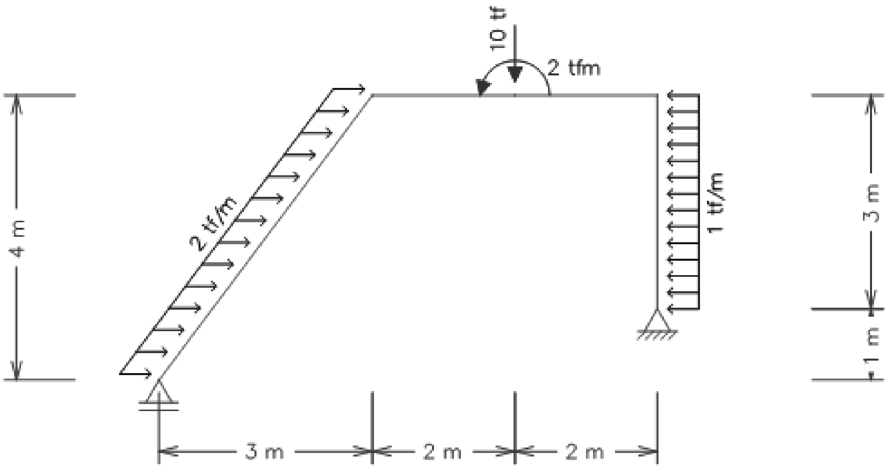
4)



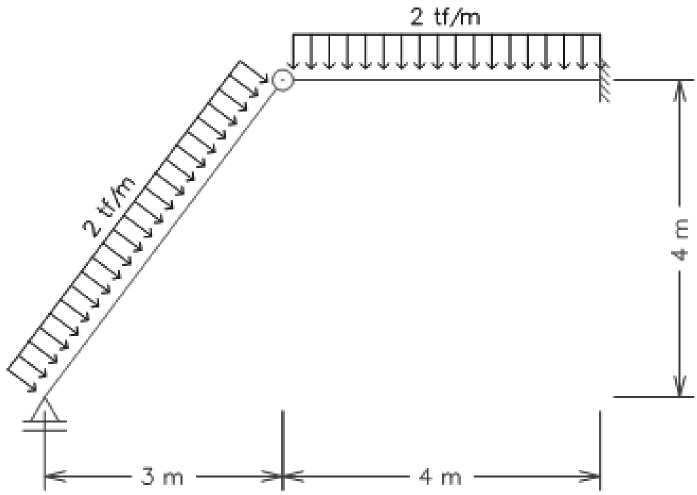
5)



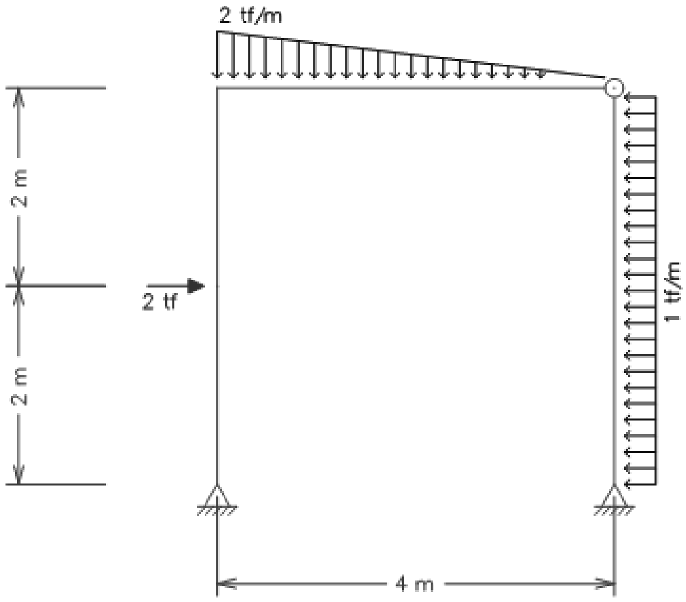
6)



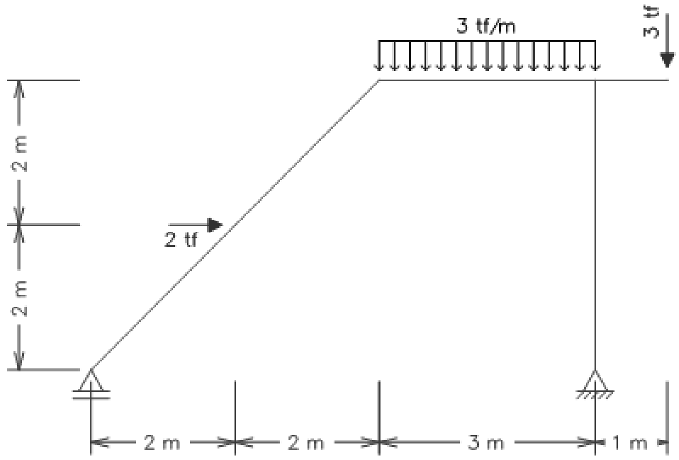
7)



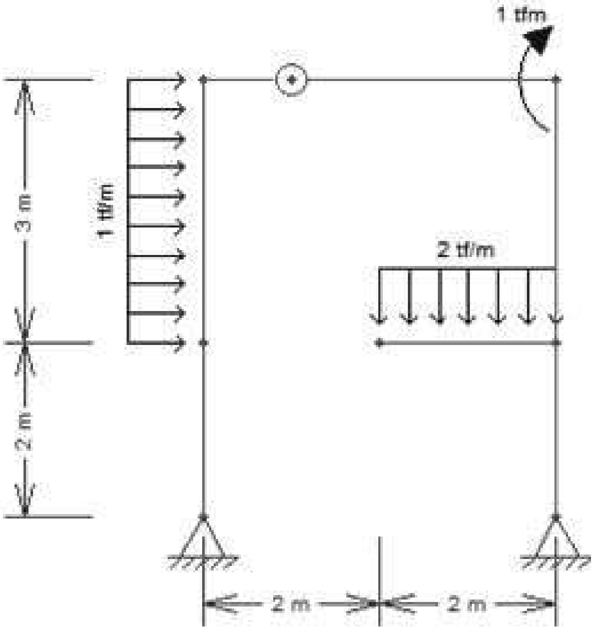
8)



9)



10)



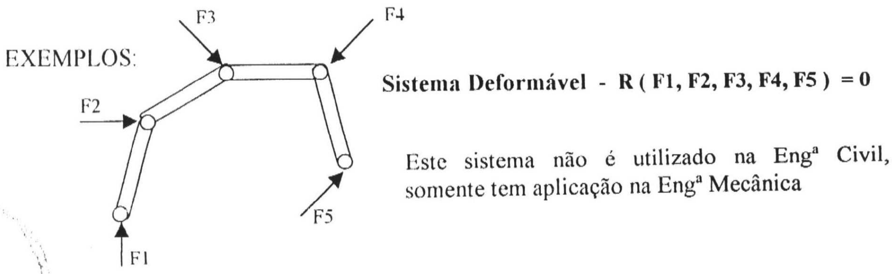
CAPÍTULO 2 – TRELIÇAS

DEFINIÇÃO:

Treliça é toda estrutura formada por barras retas birrotuladas e sob forças externas apenas nas rótulas, de maneira a ter, como consequência, apenas o esforço normal.

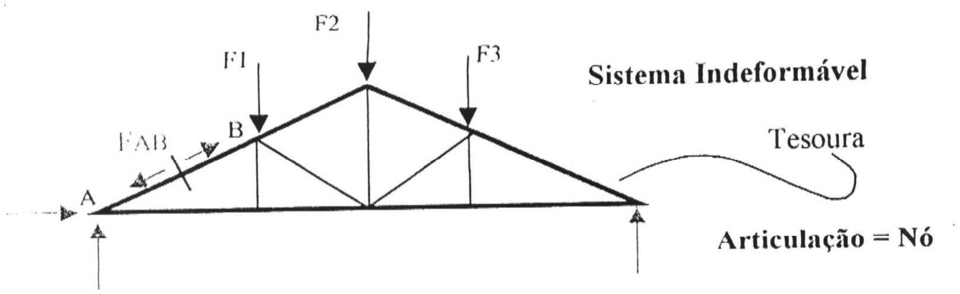
TIPOS DE SISTEMAS RETICULADOS

a) **Deformáveis:** são aqueles onde a configuração do sistema varia de forma se alternarmos as forças exteriores em: intensidade, direção ou sentido, atingindo outro estado de configuração. (Engenharia Mecânica)

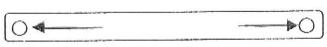


b)

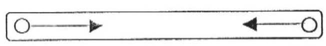
c) **Indeformáveis:** são aqueles onde a configuração do sistema não muda se alternarmos as forças externas.



NATUREZA DOS ESFORÇOS NAS BARRAS



Barra de compressão



Barra de tração

ESTABILIDADE INTERIOR DOS SISTEMAS RETICULADOS

- SISTEMAS ISOSTÁTICOS: **Nº EQUAÇÕES = Nº INCÓGNITAS**

Seja: m = número de barras → nº incógnitas = m+3

J = número de nós → nº equações = 2j

Logo, se $\boxed{m + 3 = 2j}$

Teremos que: para estrutura ser isostática: $\boxed{\mathbf{m = 2j - 3}}$

TRELIÇAS PLANAS

Uma treliça plana é uma estrutura constituída de 3 ou mais barras, presas em pontos chamados "nós", formando um corpo rígido. Consideremos os *nós* como *ligações* sem atrito, que não podem transmitir momentos exercidos sobre as barras. Assim, somente forças de compressão ou tração agem sobre as barras da treliça.

As cargas e reações agem somente nos nós. Quando os elementos de uma treliça situam-se essencialmente em um mesmo plano, a treliça é plana. A unidade básica da treliça plana é o triangulo.

2.1 – MÉTODO DOS NÓS

Este método consiste em satisfazer as condições de equilíbrio com relação com relação às forças que atuam em cada nó; portanto, somente duas equações de equilíbrio independentes estão envolvidas ($\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$).

-Uma treliça é estaticamente determinada quando satisfaz a equação:

$$\boxed{m + 3 = 2j}$$

Onde: m = número de barras

J = número de nós

Se: $m + 3 > 2j \Longrightarrow$ Treliça estaticamente indeterminada internamente

Se: $m + 3 < 2j \Longrightarrow$ Treliça instável

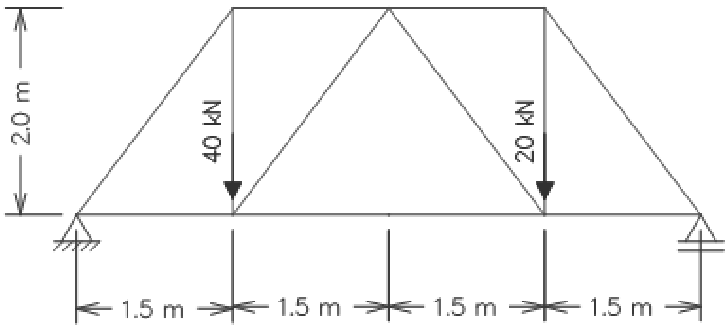
-Calculam-se as reações nos apoios.

-A análise se inicia com um nó no qual exista pelo menos uma carga conhecida (reação de apoio e/ ou esforço em barra), e onde estejam presentes até 2 forças desconhecidas.

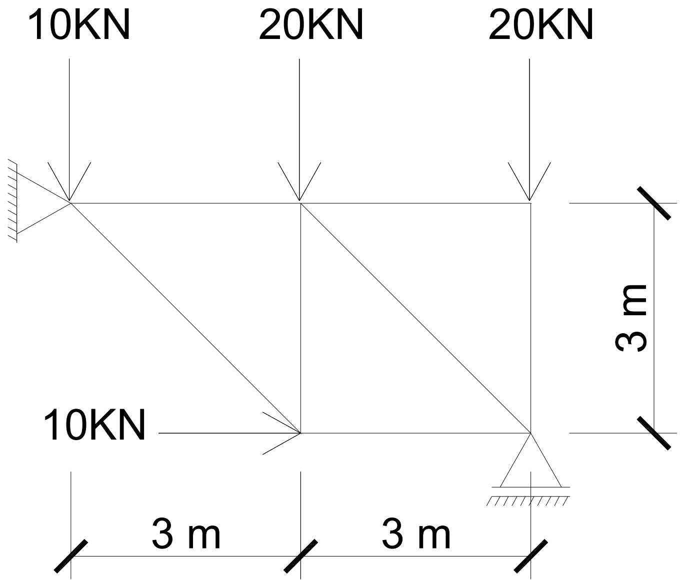
-Diagrama do corpo livre é desenhado para cada nó. Indique cada um dos nós por uma letra, e as forças nas barras por duas letras que definem as extremidades do elemento.

OBSERVAÇÃO: Em algumas situações não é possível atribuir o sentido correto de uma, ou de ambas as forças incógnitas que atuam em um determinado nó. Neste caso, a obtenção de valor negativo após a realização dos cálculos indica que o sentido inicialmente presumido está trocado.

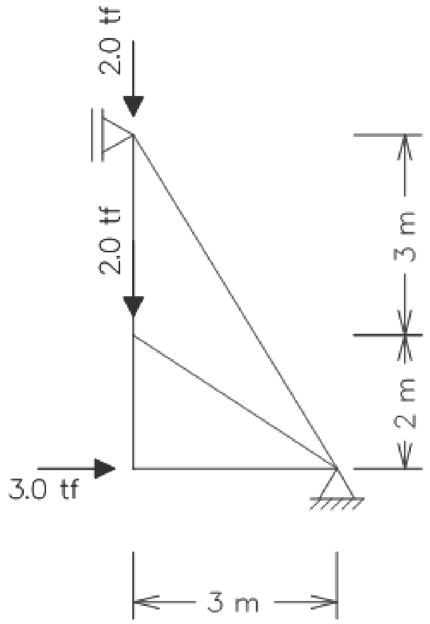
1)



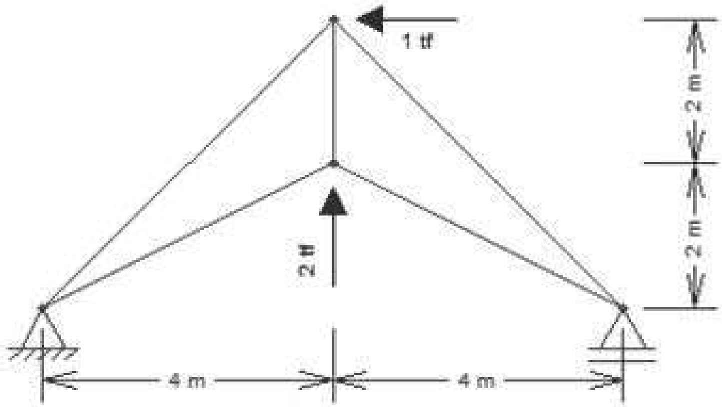
2)



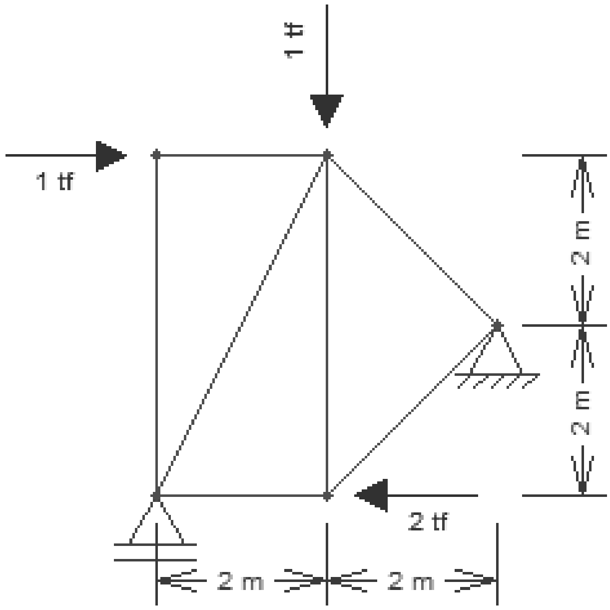
3)



4)



5)



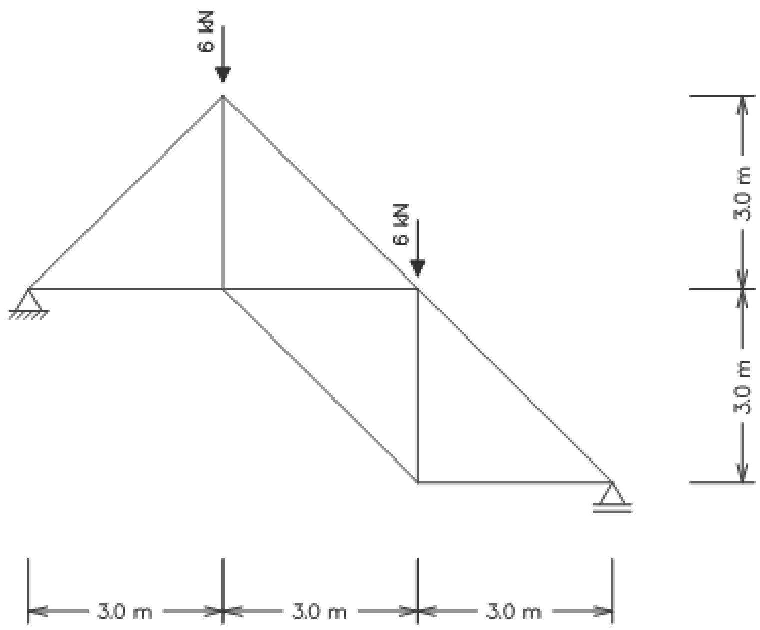
2.2 – MÉTODO DAS SEÇÕES

No método das seções, somente duas (2) das três (3) equações de equilíbrio são empregadas. A utilização da 3ª equação - $\sum M_0 = 0$ - envolve análise em uma seção inteira da treliça. Este procedimento é denominado **método das seções**.

Vantagem: a seção a ser escolhida e analisada deve ser de modo que não mais de 3 barras cujas forças desconhecidas sejam cortadas.

Atribuir sentido de tração às forças incógnitas das barras.

EXERCÍCIO 1



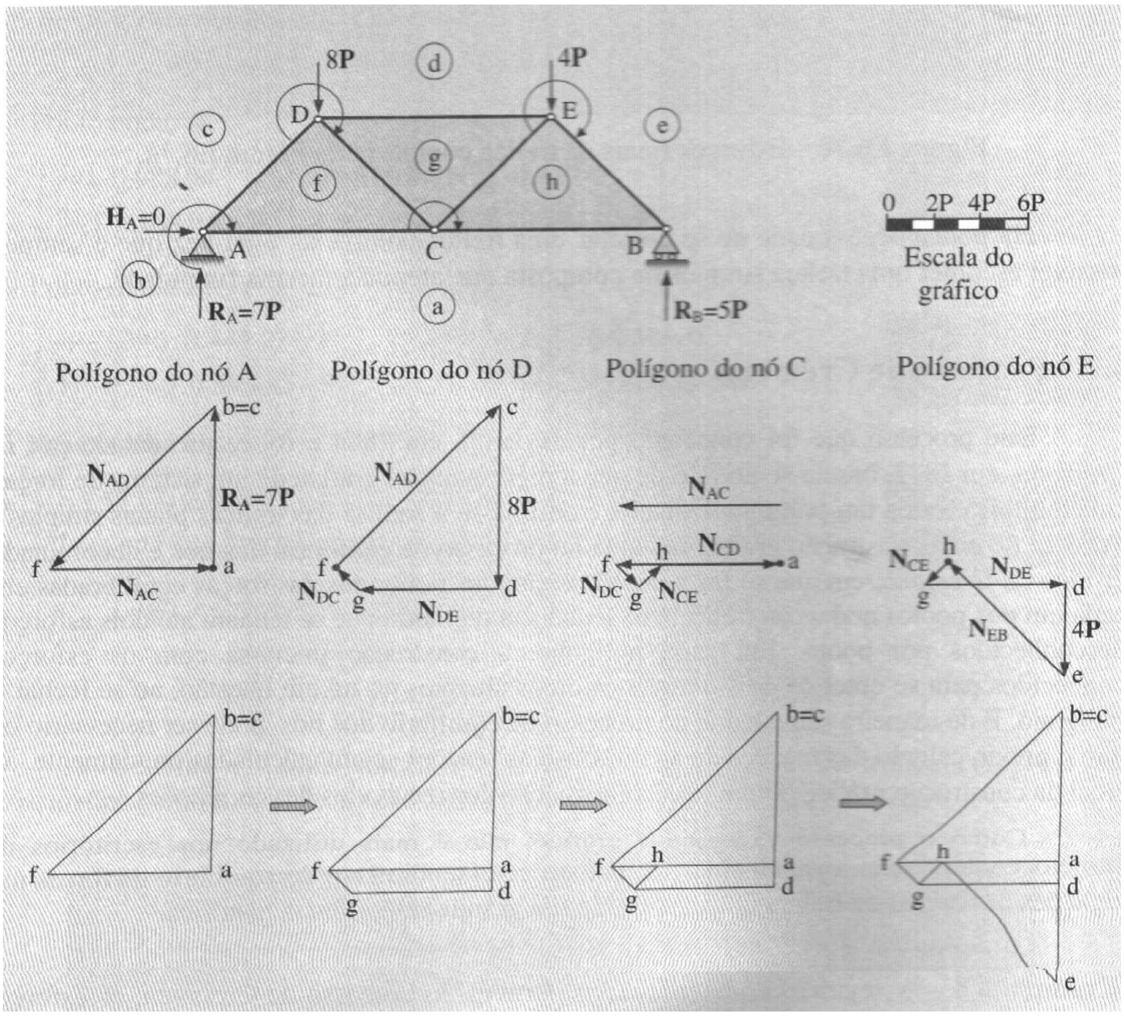
2.3 – MÉTODO DE CREMONA

É o estudo gráfico do equilíbrio de uma ou mais forças concorrentes num ponto, por duas forças de direções conhecidas e também concorrentes no mesmo plano.

REGRAS:

- Só se pode iniciar o traçado do Cremona, estudando o equilíbrio em um nó que contenha apenas duas barras cujos esforços sejam desconhecidos.
- Fixar um sentido de rotação e percorrer cada nó sempre no mesmo sentido.
- Ao estudar o equilíbrio de cada nó, começar o traçado do polígono respectivo por uma força exterior ou por uma força interior já conhecida de tal modo que, percorrendo o nó no sentido fixado se encontram primeiro as forças conhecidas, ficando para depois as duas forças desconhecidas.

Exemplo:



EXERCÍCIO 1